数理解析研究所講究録
434巻 1981年 47-71

Ising モデルの相境界線とブラウン運動

神戸大 理 樋口保成

§1. Ising Model

$\mathbb{Z}^2$ を平面正方格子、$\mathbb{L}$ をその dual 格子とする。i.e.

$$\mathbb{Z}^2 = \{(x_1, x_2)\,;\ x_1, x_2 \text{ は integers}\},$$

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\,;\ (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

$\mathbb{L}$ 上の各点には ± 1 の値をとるスピンが配置されているものとし、その配置のしかた(Configuration)全体を Ω とかく。$\mathbb{L}$ 上に配置されたスピンは互に隣のスピンと相互作用しあっている。今、configuration $\omega \in \Omega$ が与えられた時、x 上のスピン $\sigma(x)$ とその隣の点 y 上のスピン $\sigma(y)$ の間には、$J\sigma(x)\sigma(y)$ の相互作用が働いている。$J > 0$ のとき相互作用は反強磁性的、$J < 0$ のとき強磁性的、$J = 0$ のとき相互作用なしである。ここでは $J < 0$ のときのみを考える。$J = -1$ としても一般性は失われないので以下、$J = -1$ のみを考える。

N を正整数、$V_N \equiv \{(x_1, x_2) + (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})\,;\ 0 \le x_1 \le 2N-1,$

$$-N \le x_2 \le N-1\}$$

とおく。Configuration $\sigma \in \Omega$ のときの V_N に関係するエネルギー $E_{V_N}(\sigma)$ は：

$$E_{V_N}(\sigma) = -\sum_{\substack{\langle x, y\rangle \\ x \text{ or } y \in V_N}} \sigma(x)\cdot\sigma(y) - \sum_{x \in V_N} h\,\sigma(x)$$

であたえられる。ただし $\sum_{\langle x,y\rangle}$ は x と y が隣合う pair$\langle x,y\rangle$ についての和，h は外部磁場の強さとする。（$h \in \mathbb{R}$）上の式第一項には x か y が V_N に入っており，他方が V_N に入っていない pair $\langle x,y\rangle$ が現われている。この様な pairs から出てくる部分和の項，$\sum_{\langle x,y\rangle;\, x \in V_N,\, y \notin V_N}$ を boundary term と呼ぶことにする。$\omega \in \Omega$ があたえられた時，V_N の外部の configuration を ω に fix する。この時得られる上式のエネルギーを $E^{\omega}_{V_N}(\sigma)$ とかくことにする。$E_{V_N}(\sigma)$ と $E^{\omega}_{V_N}(\sigma)$ の差は boundary term にだけ現われる。温度 $T > 0$ のときの $E^{\omega}_{V_N}(\cdot)$ に対応した Gibbs 場（$E^{\omega}_{V_N}(\cdot)$ に対する平衡状態）は次の式であたえられる $\Omega_N = \{+1, -1\}^{V_N}$ 上の確率である。

(1) $$P^{\omega}_N(\sigma) = [Z^{\omega}_N]^{-1} \exp\{-\beta E^{\omega}_{V_N}(\sigma)\}$$

$$Z^{\omega}_N = \sum_{\sigma' \in \Omega_N} \exp\{-\beta E^{\omega}_{V_N}(\sigma')\}$$

ただし，

$$\beta = 1/kT, \quad k \text{ は Boltzmann const.}$$

勝手な $N > 0$ と $\omega \in \Omega$ に対して上の様にして Gibbs 場 P^{ω}_N が定まるが，この系 $\{P^{\omega}_N;\, N > 0,\, \omega \in \Omega\}$ は次の様な consistent

な系となっている。

$V_1 \subset V_2$, $\sigma_1 \in \Omega_{V_1}$, $\sigma_2 \in \Omega_{V_2 \setminus V_1}$ とし、$\sigma_1 \cdot \sigma_2$ を Ω_{V_2} の元で $(\sigma_1 \cdot \sigma_2)(x) = \sigma_1(x)$ if $x \in V_1$, $\sigma_2(x)$ if $x \in V_2 \setminus V_1$ とおくとき、

(2) $\quad P_{V_2}^{\omega}(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = P_{V_1}^{\sigma_2 \cdot \omega}(\sigma_1)\, P_{V_2}^{\omega}(\{\sigma' ; \sigma'(x) = \sigma_2(x) \ \forall x \in V_2 \setminus V_1\})$

$\sigma_2 \cdot \omega$ の定義も $V_2 \setminus V_1$ と $\mathbb{L} \setminus V_2$ に分けて上の様に定義したものとする。(2)式を見ると $P_{V_1}^{\sigma_2 \cdot \omega}$ は $P_{V_2}^{\omega}$ の $V_2 \setminus V_1$ 上で σ_2 をとるという条件をつけた条件付き確率になっている。従って自然に $\mathbb{L}$ 上の Gibbs 場が次の様に定義できることになる。

<u>定義</u> Ω 上の確率測度 μ が <u>Gibbs 場</u>であるとは、任意の有限な $V \subset \mathbb{L}$ と任意の $\sigma \in \Omega_V = \{+1, -1\}^V$ に対して

$$\mu(\sigma \mid \mathcal{B}_{V^c})(\omega) = P_V^{\omega}(\sigma) \qquad \mu\text{-a.e. } \omega$$

が成り立つことである。ただし $\mathcal{B}_{V^c} = \sigma\{\omega(x); x \in V^c\}$ とする。$\mu(\cdot \mid \mathcal{B}_{V^c})(\omega)$ は V^c 上 ω であるという条件を付けたときの μ の条件付確率。

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\beta, h)$ をすべての Gibbs 場(パラメータは β と h に fix)の全体とする。このとき以下のことが知られている。

<u>定理</u> ある $\beta_c > 0$ があって、$\beta \leq \beta_c$ または $h \neq 0$ のとき $\mathcal{G}(\beta, h)$ はただ一点より成る。$\beta > \beta_c$, $h = 0$ のとき、$\mathcal{G}(\beta, h) = \{\lambda \mu_+ + (1-\lambda)\mu_- ; \lambda \in [0, 1]\}$ となる。ここに、μ_+, μ_- は2つの異なる Gibbs 場で次のようにして得ら

れる。$\Lambda \subset \mathbb{L}$を勝手な有限集合とする。このとき

$$\mu_+(\sigma(x)=+1, \forall x \in \Lambda) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^2} P_V^{\omega^+}(\sigma(x)=+1, \forall x \in \Lambda)$$

$$\mu_-(\sigma(x)=+1, \forall x \in \Lambda) = \lim_{V \uparrow \mathbb{Z}^2} P_V^{\omega^-}(\sigma(x)=+1, \forall x \in \Lambda)$$

ω^+、ω^-はそれぞれ$\mathbb{L}$上のすべての点で$+1$だけ，-1だけを取るconfigurationとする。

上の定理の意味することは相の共存がおこる(β, h)の領域においてはV_Nのboundary ∂V_Nからの影響（$E_{V_N}^{\omega}(\cdot)$における boundary term の効果）が無視できない程大きくなることである。これは long range correlation が現われるためと考えられている。

§2　相の共存

$\beta > \beta_c$, $h=0$のときを考える。V_Nの外側に適当な配置ωをおくとμ_+で特徴的なスピンの並び方とμ_-で特徴的なスピンの並び方が同時に共存している様なconfigurationが特徴的となる様にできる。それがV_N内でどうおこるかを見る。

$\omega^{\pm} \in \Omega$を

$$\omega^{\pm}(x) = \begin{cases} +1 & \text{if } x_2 \geq 0 \\ -1 & \text{if } x_2 < 0 \end{cases}$$

となる様におく。この$\omega^{\pm}$をV_Nの外部に固定したとき、$P_N^{\omega^{\pm}}$によるV_N内部の最もtypicalなconfigurationを調べていくことにする。そのため今，勝手な$\sigma \in \Omega_N$に対して$\mathbb{Z}^2$のsubgraph を次の様に定める。V_N と共通部分が空でない様な ル の pair $\langle x, y\rangle$ が $\sigma(x)\sigma(y)=-1$ or $\sigma(x)\omega^{\pm}(y)=-1$ をみたす時 $\langle x, y\rangle$ に直交する $\mathbb{Z}^2$ の bond (これは唯一つしかない) に色をつける。$\sigma(x)\sigma(y)=+1$ or $\sigma(x)\omega^{\pm}(y)=+1$ のとき $\langle x, y\rangle$ に直交する $\mathbb{Z}^2$ の bond には色をつけない。こうして V_N を囲む最小の $\mathbb{Z}^2$ の subgraph としての正方形 V_N^* の subset を得る。これはいくつかの closed polygons $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdot\cdot, \Gamma_n$ と一つの connected component λ から成る。(図1参照)

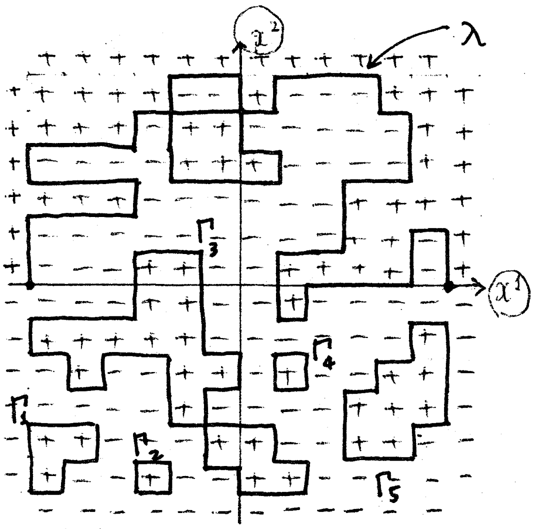


図1

σ と $\{\Gamma_i\}$, λ

λ は2点 $(0,0)$, $(2N, 0)$ を結ぶ色のついた connected component. 図1では λ が一番上にあり $\{\Gamma_i\}$ は5個ある。σ が変わればこれらの図形も変わるので正確には $\{\Gamma_i(\sigma)\}$, $\lambda(\sigma)$ と書くべきである。

$P_N^{\omega^{\pm}}(\cdot)$ の定義からすぐに

$$(3)\quad P_N^{\omega^{\pm}}(\sigma) = [\tilde{Z}_N^{\omega^{\pm}}]^{-1}\cdot \exp\{-2\beta(\sum_{i=1}^{n}|\Gamma_i(\sigma)| + |\lambda(\sigma)|)\},$$

$$\tilde{Z}_N^{\omega^{\pm}} = \sum_{\tilde{\sigma}\in\Omega_N} \exp\{-2\beta(\sum_{i=1}^{\tilde{n}}|\Gamma_i(\tilde{\sigma})| + |\lambda(\tilde{\sigma})|)\}$$

を得る。ただし $|\Gamma_i|$, $|\lambda|$ はそれぞれの長さ，$\{\Gamma_1(\sigma), \cdots, \Gamma_n(\sigma)\}$ 及び $\lambda(\sigma)$ が σ に対応して出てくる Γ_N^* の subgraph とする。$\hat{n}$ は σ に対応して出てくる closed polygons の個数である。(3) からすぐに，$\lambda(\sigma)$, $\{\Gamma_i(\sigma)\}_i$ はあまり長くない方が実現確率が高いことがわかる。N が大きいときは図1の様な現象はおこりにくくなるであろう。このことを定理としてまとめておく。

<u>定理</u>（M-S-G-M）

$\beta > \beta_c$ が十分大きいとする。($\beta \gg \beta_c$) このとき次の (i), (ii), (iii) をみたす確率は $N \to \infty$ のとき 1 に近づく。ただし確率は $P_N^{\pm}$ ではかる。

(i) $\left| |\lambda(\sigma)| - 2N \right| < \frac{C}{\beta} N$ for some $C > \ln 4$

(ii) $|\gamma_i(\sigma)| \leq C_0 \ln N$ for some $C_0 > 0$

(iii) $m^*(\beta) = \int \sigma(0)\, \mu_+(d\sigma) = -\int \sigma(0)\, \mu_-(d\sigma)$ とおくとき，$M_\lambda(\sigma) = \sum_{x:\ \lambda\text{より上}} \sigma(x)$ に対して

$$| M_\lambda(\sigma) - m^*(\beta) \cdot (2N^2) | \leq \mathcal{H}(\beta) N$$

$$| M(\sigma) - M_\lambda(\sigma) + m^*(\beta)(2N^2) | \leq \mathcal{H}(\beta) N$$

ただし $M(\sigma) = \sum_{x \in V_N} \sigma(x)$, $\mathcal{H}(\beta) \to 0$ exponentially as $\beta \to \infty$.

上の定理(M-S-G-M)の (iii) は λ の上では μ_+ と同じ様な，λ の下では μ_- と同じ様な typical configuration を持つことを主張

している。つまり $N \to \infty$ とともに1に近づく大きな確率で、$\lambda(\sigma)$ は直線に近づき、$\{\Gamma_i(\sigma)\}$ はなるべく小さくなろうとする。図2にその様子を記しておく。

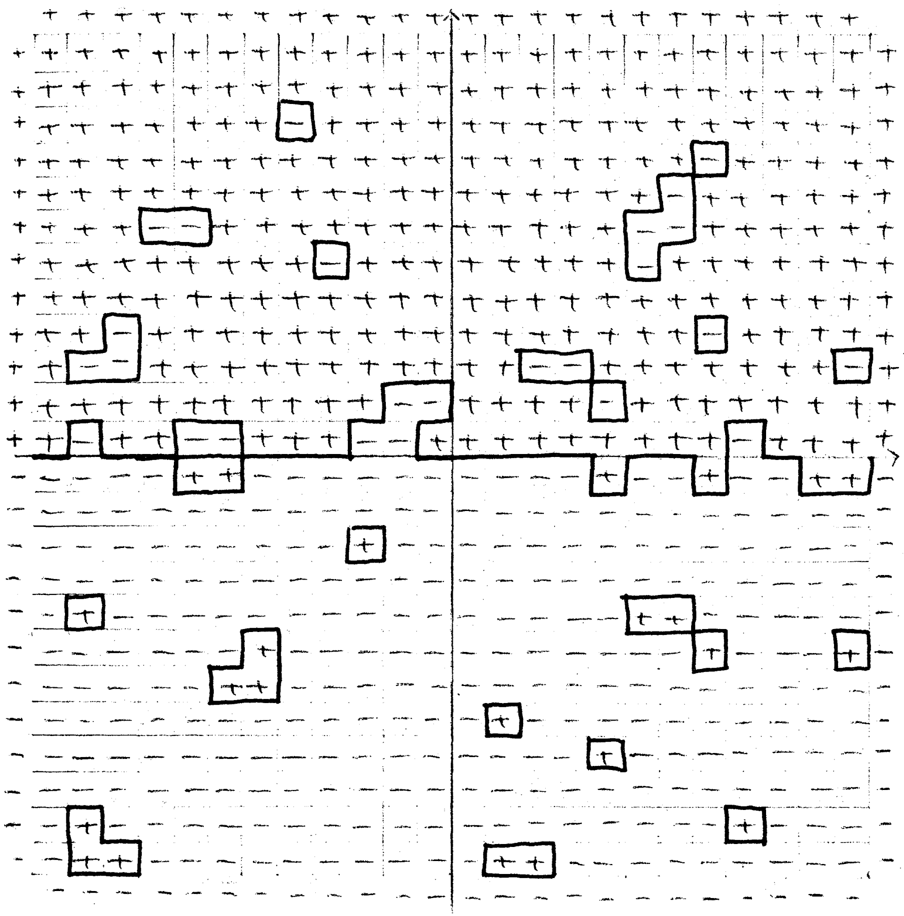


図2　$\beta \gg \beta_c$ のとき

$\lambda(\sigma)$ は2つの相（＋の相と－の相）を分離するため、境界線（phase separation line）と呼ばれる。各 Γ_i は contour と呼ぶ。

§3. $\lambda(\sigma)$ の分解

2図の $\lambda(\sigma)$ を見てみる。$|\lambda(\sigma)|$ が最も小さくなるのは、$\lambda(\sigma)$ が $(0,0)$ と $(2N,0)$ を結ぶ直線のときで、このときが実現確率は最も高い。$(0,0)$ と $(2N,0)$ を結ぶ折れ線 $\boldsymbol{\lambda}$（ラムダ）がどのくらい実現されやすいかは、この直線からの deviation によって評価できる。

$$P_N^{\omega^\pm}(\lambda(\sigma)=\lambda) = [Z_N^{\omega^\pm}]^{-1}\, e^{-2\beta|\lambda|}\, Z_N(\lambda)$$

ただし $Z_N(\lambda) = \sum^*_{\{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n\}} \exp\{-2\beta \sum_{i=1}^n |\Gamma_i|\}$ で $\sum^*_{\{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n\}}$ は λ と intersect しない様な V_N^* の closed polygons $\{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n\}$ の組で互に intersect しないものについての和。書きなおすと

$$(4)\quad P_N^{\omega^\pm}(\lambda(\sigma)=\lambda) = \frac{e^{-2\beta|\lambda|}\, Z_N(\lambda)}{\sum_{\lambda'} e^{-2\beta|\lambda'|}\, Z_N(\lambda')}$$

を得る。上に言った様に $|\lambda|$ 自身よりも λ の直線からの deviation が (4) で本質的な役割を果たすことから、λ を次の様に分解する。実数 r : $0\le r\le 2N$ に対して、$\mathcal{L}_r$ を $(r,0)$ を通り x^2 軸に平行な直線とする。λ の subset $\mathcal{S}(\lambda)$ を

$$\mathcal{S}(\lambda) = \left\{ x\in\mathbb{R}^2;\ \begin{array}{l} x\in\lambda\cap\mathcal{L}_r \text{ for } \exists r\in[0,2N], \text{かつ} \\ \#(\lambda\cap\mathcal{L}_r) > 1 \end{array} \right\}$$

とおく。$\mathcal{S}(\lambda)$ はいくつかの connected components $\mathcal{S}_1,\cdots,\mathcal{S}_p$ に分かれる。$\Xi_i \equiv \{ r\in[0,2N];\ \mathcal{L}_r\cap\mathcal{S}_i \neq \phi \}$ とおく。逆に $(\Xi_1,\cdots,\Xi_p;\ \mathcal{S}_1,\cdots,\mathcal{S}_p)$ が与えられるとこれから対応

する境界線を作ることができる。しかし、これは一般に (2N,0) で終わらない。このことを見てみよう。2図の $\lambda(\sigma)$ に対応する $\{\mathcal{S}_i\}, \{\xi_i\}$ は下図の様になる。

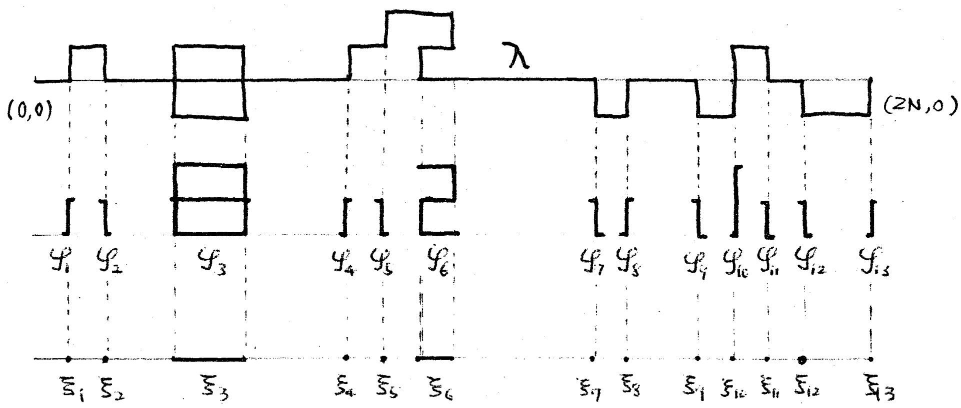
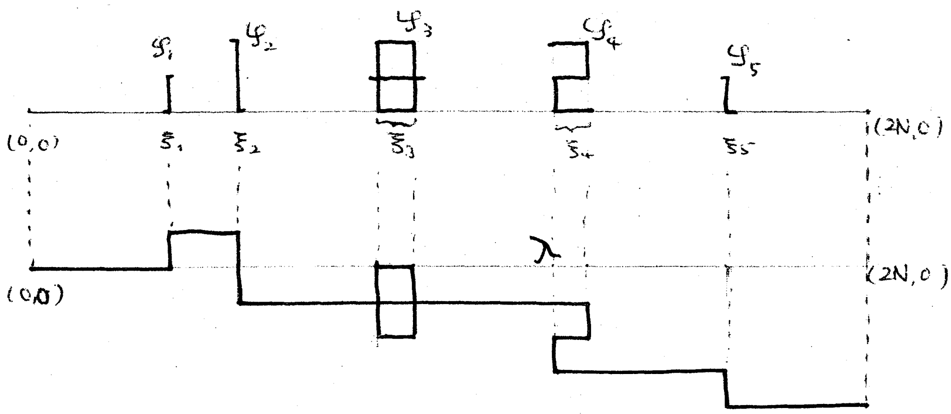


図3　λ と $\{\mathcal{S}_i\}, \{\xi_i\}$ の対応

λ と $\{\xi_i\}, \{\mathcal{S}_i\}$ が1対1に対応するには $\mathcal{S}_i$ を決めるときにその入口と出口を指定する必要が有る。上図ではそれを $\mathcal{S}_i$ から右と左に少し伸びている部分として表わしている。左に出ている部分を入口，右に出ている部分を出口と呼ぶことにする。　今、勝手に $\{\xi_i\}, \{\mathcal{S}_i\}$ を与えたら対応する λ はどうなるかを見てみる。（図4）



従って一般には勝手な$\{\xi_i\}, \{\varphi_i\}$に対しては$(0,0)$から$\{x_1 = 2N\}$に至る折れ線λが対応する。λが$(2N, 0)$で終わるという条件をつけるには各φ_iの jump $\delta\varphi_i$を見ればよい。

$\delta\varphi_i = \varphi_i$の出口の高さ $-$ φ_iの入口の高さ

そうすると、λが$(2N, 0)$で終わるということは jump を使うと $\sum_i \delta\varphi_i = 0$ という条件で表わされる。つまり(4)式は$\{\varphi_i\}, \{\xi_i\}$に関する$\sum_i \delta\varphi_i = 0$という条件の下での条件付確率となっている。従ってまずx_1軸上の粒子系$(\{\varphi_i\}, \{\xi_i\})$を考えてみる。区間$[0, 2N]$上に粒子の組；$(\{\varphi_i\}, \{\xi_i\})$が現われる確率はこのとき

$$(5) \quad \hat{P}_N(\{\varphi_i\}, \{\xi_i\}) = \hat{Z}_N^{-1} \cdot e^{-2\beta\sum_i(|\varphi_i| - |\xi_i|)} Z_N(\{\varphi_i\}, \{\xi_i\})$$

$$\hat{Z}_N = \sum_{(\{\varphi'_i\}, \{\xi'_i\})} e^{-2\beta\sum_i(|\varphi'_i| - |\xi'_i|)} Z_N(\{\varphi'_i\}, \{\xi'_i\})$$

ただし$Z_N(\{\varphi_i\}, \{\xi_i\})$は$(\{\varphi_i\}, \{\xi_i\})$に対応する$\lambda$に対する$Z_N(\lambda)$である。これはのちに定義する。$|\varphi_i|, |\xi_i|$はそれぞれ$\varphi_i, \xi_i$の長さ。$\sum_i(|\varphi_i| - |\xi_i|) = |\lambda| - 2N$であることに注意すれば、これは$(0,0)$と$(2N, 0)$を結ぶ直線からの deviation を表わす量である。(5)で与えられる粒子系を shape particle system と呼ぶ。

§4. Cluster expansion, shape potential

$\mathcal{N}$ を勝手な contours $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n\}$ の組全体とする。Γ_i と Γ_j は intersect してもよいものとする。さらに全く同じものであってもよいとする。$\mathcal{N}$ の元を γ と書くことにする。

$\mathcal{N}$ 上で定義された2つの実数値関数 f_1, f_2 に対して、積 $f_1 \circ f_2$ を次の様に定義する；

$$(f_1 \circ f_2)(\gamma) = \sum_{\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma} f_1(\gamma_1) f_2(\gamma_2) \frac{\gamma!}{\gamma_1! \gamma_2!}$$

ただし、和 $\sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma}$ の意味は ordered pair (γ_1, γ_2)；$\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{N}$ で重複度まで込めて $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ となるものについての和。$\gamma!$ は γ に属する contours の重複度を $m_1, \cdots, m_s$ とするとき $\gamma! = m_1! \cdot m_2! \cdots m_s!$ となる。f がとくに $f(\phi) = 0$ のとき、

$$(\mathrm{Exp}\, f)(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{\circ n}(\gamma)$$

と定義する。γ が有限個の contours の組であるとき上式は意味が有る。ただし $f^{\circ 0}(\gamma) \equiv \mathbb{1}(\gamma)$,

$$\mathbb{1}(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma = \phi \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく。g が $g(\phi) = 1$ をみたすとき、Exp の逆が定義できる。

$$(\mathrm{Log}\, g)(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (g - \mathbb{1})^{\circ n}(\gamma)$$

$\tilde{g} = g - \mathbb{1}$ としておく。$\tilde{g}(\phi) = 0$ だから、やはり上の

式は意味をもつ。このとき

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Exp}\, f) = f, \qquad \mathrm{Exp}(\mathrm{Log}\, g) = g$$

が証明できる。これは単なる代数的な計算なので省略することにする。$g(\phi) = 1$ なる g に対し $\mathrm{Log}\, g$ を g^T と簡単に書くことにする。このとき形式的には

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{g(\gamma)}{\gamma!} = \exp\left\{ \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{g^T(\gamma)}{\gamma!} \right\}$$

が成立することは

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{(\varphi_1 \circ \varphi_2)(\gamma)}{\gamma!} = \left(\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{\varphi_1(\gamma)}{\gamma!} \right)\left(\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{\varphi_2(\gamma)}{\gamma!} \right)$$

なる式から明らか。さらに $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ のとき $h(\gamma) = h(\gamma_1) \cdot h(\gamma_2)$ となる h に対しては

$$(6) \qquad \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{g(\gamma)}{\gamma!} h(\gamma) = \exp\left\{ \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{g^T(\gamma)}{\gamma!} h(\gamma) \right\}$$

が成り立つ。これらはすべて形式的な議論であるが、h を適当にとると (6) は正しい。それには例えば

$$(7) \qquad \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{|g^T(\gamma)|}{\gamma!} |h(\gamma)| < \infty$$

が成り立てばよい。

g として考える関数は次の式で与えられる。

$$G(\gamma) = \begin{cases} e^{-2\beta \sum_{i=1}^{n} |\Gamma_i|} & \text{if } \gamma = \{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n\},\ \Gamma_i \cap \Gamma_j = \phi \ \ {}^{\forall} i \neq {}^{\forall} j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

hとしては次の2つを考える。

$$I_V(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \gamma \subset V, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

および、

$$H_\lambda(\gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \gamma = (\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n), \quad \Gamma_i \cap \lambda \neq \phi \quad \forall i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし、λは勝手な$[0, 2N]$上の shape particles の configuration に対応した折れ線とする。

$g^T = G^T$, $h = I_V \cdot H_\lambda$として(7)が成り立つとすると、

$$(8) \quad Z_N(\lambda) = \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{G(\gamma) I_V(\gamma) H_\lambda(\gamma)}{\gamma!}$$

$$= \exp\left\{ \sum_{\gamma \in \mathcal{N}} \frac{G^T(\gamma) I_V(\gamma) H_\lambda(\gamma)}{\gamma!} \right\}$$

を得る。

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{N}} G^T(\gamma) I_V(\gamma) H_\lambda(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{N} \\ \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda = \phi}} G^T(\gamma)$$

だから(4)において

$$(4') \quad P_N^{\omega^I}(\lambda(\cdot) = \lambda) = \frac{e^{-2\beta|\lambda|} \exp\left\{ - \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{N}, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda \neq \phi}} G^T(\gamma) \right\}}{\sum_{\lambda'} e^{-2\beta|\lambda'|} \exp\left\{ - \sum_{\substack{\gamma \in \mathcal{N}, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda' \neq \phi}} G^T(\gamma) \right\}}$$

なる式を得る。さらにG^Tの性質を見てみよう。Gにかえって見るとき、次の式が成り立っている；

$$G(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_s) = e^{-\sum_i |\Gamma_i|} \prod_{i<j} \Theta(\Gamma_i, \Gamma_j)$$

ただし

$$\Theta(\Gamma, \Gamma') = \begin{cases} 1 & \text{if } \Gamma \cap \Gamma' = \phi,\ \Gamma \cup \Gamma' \text{は connected でない。} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき $G^T = \mathrm{Log}\, G$ を使うと

$$G^T(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s) = e^{-2\beta\sum_i |\Gamma_i|} \sum_C \prod_{\{\Gamma', \Gamma''\} \subset C} (\theta(\Gamma', \Gamma'') - 1)$$

となる。ここに、$\sum_C$ は $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s$ を結ぶすべての connected graphs の全体にわたってとるものとする。上の式から $\{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s\}$ が2つの connected parts に分かれたら ($\bigcup_{i=1}^{s} \Gamma_i$ が2つの connected components に分離するとき) この2つのグループに属する contours をそれぞれ $\{\Gamma'_1, \cdots, \Gamma'_u\}$, $\{\Gamma''_1, \cdots, \Gamma''_v\}$ とすると $\theta(\Gamma'_i, \Gamma''_j) = 1$ for any i, j だから、G^T の式のすべての項は0になる。よって、$G^T(\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s) \neq 0$ ならば $\bigcup_{i=1}^{s} \Gamma_i$ は connected となる。従って (4′) は次の様に書き直すことができる。

$$(4'') \quad P_N^{\omega^\pm}(\lambda(\sigma) = \lambda) = \frac{e^{-2\beta|\lambda|} \exp\left\{-\sum^*_{\substack{\gamma \in V,\, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda \neq \phi}} G^T(\gamma)\right\}}{\sum_{\lambda'} e^{-2\beta|\lambda'|} \exp\left\{-\sum^*_{\substack{\gamma \in V,\, \gamma \subset V \\ \gamma \cap \lambda' \neq \phi}} G^T(\gamma)\right\}}$$

ただし、$\sum^*$ は $\gamma = \{\Gamma_1, \cdots, \Gamma_s\}$ とかくとき $\bigcup_i \Gamma_i$ が connected なものだけについての和。

ここでλから$(\{\varphi_i\},\{\xi_i\})$の空間へ移ることを考えたい。そのためには$Z_N(\lambda)$に対応するtermが$(0,0)$と$(2N,0)$を結ぶ直線からのdeviationの形で書かれる方が望ましい。そこで、単純に

$$\sum_{\substack{\gamma\cap\lambda\neq\phi\\ \gamma\subset V}} G^T(\gamma) = \sum_{\substack{\gamma\cap \ell\neq\phi\\ \gamma\subset V}} G^T(\gamma) + U(\varphi(\lambda))$$

とおく。Möbius inversion formulaを使うと$0\leq \nu\leq s$に対し

$$\Phi(\{\tilde{\varphi}_i\},\{\tilde{\xi}_i\}) = \sum_{(\{\tilde{\tilde{\varphi}}_i\}_{i=1}^{\nu},\{\tilde{\tilde{\xi}}_i\}_{i=1}^{\nu})\subset(\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^{s},\{\tilde{\xi}_i\}_{i=1}^{s})} (-1)^{\nu}\, U(\{\tilde{\tilde{\varphi}}_i\}_{i=1}^{\nu},\{\tilde{\tilde{\xi}}_i\}_{i=1}^{\nu})$$

とかける。上の和の意味はshape particleの集まりとしてのsubsets $(\{\tilde{\tilde{\varphi}}_i\},\{\tilde{\tilde{\xi}}_i\})$をとる。ただし$0\leq s\leq n$に対して

$$U(\{\varphi_i\}_{i=1}^{n},\{\xi_i\}_{i=1}^{n}) = \sum_{(\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1}^{s},\{\hat{\xi}_i\}_{i=1}^{s})\subset(\{\varphi_i\}_{i=1}^{n},\{\xi_i\}_{i=1}^{n})} \Phi(\{\hat{\varphi}_i\},\{\hat{\xi}_i\})$$

なる関係が成り立つ。ΦがShape potentialと呼ばれる。

§5. G^T及びΦの評価

今までの議論が正しいためには少なくとも$g^T=G^T$, $h=J_V$として(7)が成立していなくてはならない。このためG^Tの評価が必要となる。

<u>補題1</u>　G^Tは以下の性質をみたす。ただしβは十分大とする。

(1) ある $\delta(\beta)$ という $\beta\to\infty$ のとき 0 に exponential に近づく関数が取れて、勝手な点 $p\in\mathbb{Z}^2$ に対して

$$\sum_{\substack{\gamma\ni p\\ \gamma\in\mathcal{N}}} |G^T(\gamma)| < \delta(\beta)$$

(2) ある $K(\beta)$ という $\beta\to\infty$ のとき 0 に exponential に近づく関数がとれて、勝手な contour Γ と自然数 n に対して

$$\sum_{\substack{\gamma\ni\Gamma\\ N(\gamma)=n+1}} |G^T(\gamma)| \leq K(\beta)^{n+1}\, e^{-\frac{1}{2}\beta|\Gamma|}$$

ただし $N(\gamma)$ は γ に含まれる contours の個数。

補題 1 の (1) により、明らかに条件 (7) が成立することがわかる。従って今までの議論はすべて正しいことになる。上の証明のためにいくつかの記号を準備する。

$\mathcal{N}$ 上の関数 f と contour Γ に対して

$D_\Gamma f(\gamma) = f(\Gamma+\gamma)$ とおく。一般に $\gamma\in\mathcal{N}$ に対して $D_\gamma f(\gamma') = f(\gamma+\gamma')$ と定義。このとき

$$D_\Gamma(f_1\circ f_2) = (D_\Gamma f_1)\circ f_2 + f_1\circ(D_\Gamma f_2)$$

および $D_\Gamma(\mathrm{Exp}\, f) = (D_\Gamma f)\circ \mathrm{Exp}\, f$

を得る。

G を我々の扱っている関数として G^{-1} をこの積 $\circ$ に関する逆とする。このとき新しく $\Delta_\gamma(\gamma') = (G^{-1}\circ D_\gamma G)(\gamma')$

とおくと、

$$(9) \quad \frac{\Delta_{\Gamma+\gamma}(\gamma')}{\gamma'!} = e^{-2\beta|\Gamma|} \sum_{\gamma''\subset\gamma'}^{*} (-1)^{N(\gamma'')} \frac{\Delta_{\gamma+\gamma''}(\gamma'-\gamma'')}{(\gamma'-\gamma'')!}$$

を得る。ただし $\sum^{*}$ は ① $\gamma''\subset\gamma'$ (multiplicity もこめて) ② $\Gamma+\gamma''$ は non-intersecting ③ $\Gamma''\in\gamma''$ のとき $\Gamma''\cap\Gamma\neq\phi$ なる条件の下での和。

$G = \mathrm{Exp}\, G^{T}$ だから両辺に D_{Γ} をほどこすと

$D_{\gamma} G^{T} = G^{-1}\circ D_{\Gamma} G = \Delta_{\Gamma}$ となることより、$|\Delta_{\Gamma}|$ を評価すればよい。

$$I_m = \sup_{\substack{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n \\ 1\leq n\leq m}} \sum_{\substack{\gamma \\ N(\gamma)=m-n}} |\Delta_{\{\Gamma_1,\cdots,\Gamma_n\}}(\gamma)|\, e^{\beta\sum_i|\Gamma_i|}$$

とおくと (9) よりすぐに

$$I_{m+1} \leqq I_m\, e^{-2\beta}$$

を得る。 $I_1 = e^{-4\beta}$ も簡単にわかるから(勝手な contour の長さ $\geqq 4$ だから) $I_m \leqq e^{-2\beta(m+1)}$ を得る。

$$\sum_{P\in\gamma} |G^{T}(\gamma)| \leq \sum_{P\in\Gamma} \sum_{\gamma} |G^{T}(\Gamma+\gamma)|$$
$$\leqq \sum_{P\in\Gamma} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{N(\gamma)=m-1} |\Delta_{\Gamma}(\gamma)| \leq \varepsilon(\beta) \quad //$$

(2) の証明も同様にできる。

亜の方の評価も補題1を使うことによってできる。結果のみを書く。

補題2　βを十分大きくとっておくと次の式が成立。

$$|\Phi(\{\varphi_i\}\{\xi_i\})| \leq \Phi_0(\{\xi_i\})(|\varphi_\xi| - |\xi|)$$

ここにξは$\{\xi_i\}$の中で一番右か一番左側の位置、φ_ξはξ上におかれたshape particleとする。Φ_0は次の評価をみたす。

$$\sup_{\xi_0 \in T} \sum_{\substack{\xi_0 \in X \\ X \subset T}} \Phi_0(X) = \psi(\beta) \xrightarrow[\beta\to\infty]{} 0 \quad \text{exponentially}$$

さらに適当に大きな定数R_0に対して（$R_0 = 100$ならo.k.）

$$\sum_{\substack{X \ni \xi_0 \\ X \ni \xi_1}} \Phi_0(X) \leq \mathrm{Const}\cdot(8R_0^{-1})^{d(\xi_0,\xi_1)}\,\psi(\beta)$$

$d(\xi_0, \xi_1)$はξ_0とξ_1の距離。

上の式の意味することは、βが十分大きければ、shape particles間の相互作用は非常に小さくなることである。従って一次元理想気体の持つ性質に近いことがβが大きいところで言えるであろうと予想できる。

§6. 中心極限定理

ここでは再びshape particlesの空間にもどる。考える確率は(5)であたえられる。ただし

$$Z_N(\{\varphi_i\}_{i\in I}, \{\xi_i\}_{i\in I}) = C_N \cdot \exp\Big\{-\sum_{I'\subset I} \Phi(\{\varphi_{i'}\}_{i'\in I'}, \{\xi_{i'}\}_{i'\in I'})\Big\}$$

C_NはNにのみdependする定数。

このとき

$$\hat{P}_N\left(\sum_{i\in I}\delta\varphi_i = 0\right) = P_N(0)$$

を考えてみる。各φ_iは互に非常に弱い相互作用で結ばれているだけだから、確率変数の列$\{\delta\varphi_i\}_{i\in I}$はかなり独立に近いと思われる。$\int \delta\varphi_i \, d\hat{P}_N$ はφ_iに対してφ_iの頭と下をひっくり返した粒子φ_i'を対応させることにより0であることがわかる。従って$\{\delta\varphi_i\}_{i\in I}$に対して中心極限定理が成り立つものと期待される。

一般に勝手な$k\in\mathbb{Z}$に対してNが十分大のとき

$$P_N(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{E}_N\left(e^{it\sum_{j\in I}\delta\varphi_j}\right) e^{-itk}\, dt$$

とかける。$e^{it\sum_{j\in I}\delta\varphi_j}$ はφ_jに関して multiplicative。§4でやった cluster expansion を shape particles の空間で行なう。このとき

$$\Phi(\varphi_X) = \begin{cases} e^{-2\beta_c(|\varphi_X|-|X|)}\; e^{-U(\varphi_X)} & \text{if } X=(\xi_1,\cdots,\xi_n) \\ & \quad \xi_i\cap\xi_j=\phi \quad i\neq j. \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく。ただしβ_cは十分大きいとし、βは$\psi(\beta) > \beta_c$となる様に大きくとっておく。

$$\Phi^T(\varphi_{X\cup\xi}) = (\Phi^{-1}\circ D_{\varphi_\xi}\Phi)(\varphi_X)$$

に関する評価が§5と同様に成り立ち、

$$\hat{E}_N\left(e^{it\sum_{j\in I}\delta\varphi_i}\right) =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{X\subset[0,2N]} \sum_{\varphi_X} \Phi^T(\varphi_X)\, e^{-(\beta-\beta_0)(|\varphi_X|-|X|)} \left(e^{it\delta\varphi_X}-1\right) \right\}$$

ただし、$X=(\xi_1,\ ,\xi_n)$ のとき $|X|=\sum_i |\xi_i|$ とする。上の{ }内の式で main term は β, β_0 が十分大のときには $X=\{\xi\}$, $|\xi|=0$, $|\varphi_\xi|=1$ のときの影響のみであることが Φ^T の評価（§5でやったのと同様にできる）によってわかり、このことから、計算を敢行すると、次の結果を得る。

定理 1

$\beta>\beta_0$ をどちらも十分大とする。このとき、

$$\hat{P}_N\Big(T_j\sigma\sqrt{N} \le \sum_{\xi\in X} \chi_j^{(N)}(\varphi_\xi)\cdot\delta\varphi_\xi \le T_j'\sigma\sqrt{N}\ \ j=1,2,\cdots,k \,\Big|\, \delta\varphi_X=0\Big)$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} P_{0,0}^{1,0}\left(X(t_j)\in[T_j,T_j'],\ j=1,2,\cdots,k\right)$$

を得る。ただし $\chi_j^{(N)}(\varphi_\xi) = 1$ if $\xi\subset[0,2N\cdot t_j]$, 0 otherwise, かつ $(X(t), P_{0,0}^{1,0})$ は1次元の Brownian bridge（$X(1)=X(0)=0$ という条件つきの Brown 運動。）

§7. λ の収束

上の定理1でおおむねλが Brownian bridge に収束するということは言えたわけだが、まだ正確ではない。実際 $\{x_1=k\}$ という直線とλの交点はたくさん有り、$\lambda\cap\{x_1=k\}$ の直径が $\sqrt{N}$ の order をこえる様なら、λの行き先が有ったとしても1次元 Brownian bridge の path とは異なっているはずで

ある。この様なことがないことは次の補題による。

補題3　βが十分大のとき

$$P_N(\exists \xi \text{ s.t. } |\mathcal{G}_\xi| > C \ln N) = o\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{as } N \to \infty$$

証明には shape particle の correlation function $\rho_N(\mathcal{G}_X)$ を使う。$\rho_N(\mathcal{G}_X)$ は一般化された Kirkwood−Salsburg 方程式

$$(10)\quad \rho_N(\mathcal{G}_X) = e^{-2\beta(|\mathcal{G}_{\xi_1}|-|\xi_1|) - U_1(\mathcal{G}_X)} \times$$
$$\times \sum_{Y \cap X = \phi} \sum_{\mathcal{G}'_Y} K_1(\mathcal{G}_X, \mathcal{G}'_Y) \times$$
$$\times \sum_{\substack{\overline{P \cap \xi_1 \neq \phi} \\ P \cap (X^{(1)} \cup Y) = \phi}} \sum_{\mathcal{G}''_P} (-1)^{N(P)} \rho(\mathcal{G}_{X^{(1)}} \cup \mathcal{G}'_Y \cup \mathcal{G}''_P)$$

をみたす。$\xi_1 \in X$ に対し $X^{(1)} = X - \xi_1$，$\overline{P \cap \xi_1 \neq \phi}$ は $\forall \xi \in P$ について $\xi \cap \xi_1 \neq \phi$ か $P = \phi$ のどちらかが成り立つということを意味。β が十分大のとき ρ_N は次の様な関数空間に入りそこで unique な K−S 方程式(10)の解となる。

$$\mathcal{B} = \left\{ f : \mathcal{G}_X \mapsto f(\mathcal{G}_X),\ \|f\| = \sup_{X, \mathcal{G}_X} \frac{|f(\mathcal{G}_X)|}{e^{-\beta(|\mathcal{G}_X|-|X|)}} < \infty \right\}$$

実際，このとき

$$\rho_N(\mathcal{G}_\xi) \le \frac{e^{-\beta(|\mathcal{G}_\xi|-|\xi|)}}{1-k(\beta)}$$

$k(\beta) \to 0$ exponentially as $\beta \to \infty$

なる評価を得る。

$$P_N(\exists \xi \text{ s.t. } |\mathcal{G}_\xi| > C \ln N) \le \sum_{\xi \subset [1, 2N]} \sum_{|\mathcal{G}_\xi| > \ln N} \rho_N(\mathcal{G}_\xi)$$

$$\leq N \sum_{l=0}^{\infty} l \sum_{\substack{k=C\ln N \\ k\geq l}}^{\infty} \frac{9^k e^{-\beta k}}{1-k(\beta)}$$

$$\leq \text{Const} \times (\ln N)^2 \cdot r^{C\ln N} \qquad , \qquad r = 9e^{-\beta}$$

$$r^{C\ln N} = N^{C(\ln 9-\beta)} = o\left(\frac{1}{N}\right) \quad \text{if} \quad \beta > \ln 9 + \frac{1}{C}$$

これより補題3の主張が出てくる。

以上により、だいたい直観的には入が normalize されたとき Brownian bridge に収束することがわかる。数学的にはっきりとした形で主張するために少し整理しておく。

$\mathcal{A}_N$ を $\mathbb{Z}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像で

$$\mathcal{A}_N(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{N}, \frac{x_2}{\sqrt{N\sigma}}\right) \quad \text{とおく。}$$

さらに $\mathcal{C} \equiv \left\{ K \subset [0,1]\times\mathbb{R} \; ; \; K \text{ compact}, \; \begin{matrix} K\cap\{x_1=0\}\neq\emptyset \\ K\cap\{x_1=1\}\neq\emptyset \end{matrix} \right\}$

とおく。$\mathcal{A}_N(\lambda)$ は常に $\mathcal{C}$ に入っている。定理1が言っていることは、勝手な $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<1$ に対して

$\{\mathcal{A}_N(\lambda)\cap\{x_1=t_i\}\}_{i=1}^{n}$ の分布が Brownian bridge の分布に $N\to\infty$ のとき収束するということである。だが現実にはもっと強いことが言える。そのため $\mathcal{C}$ に metric d を次の様に入れておく。$\forall c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ に対し

$$d(c,c') = \frac{1}{2}\left\{\sup_{x\in c_1}\inf_{y\in c_2}|x-y| + \sup_{y\in c_2}\inf_{x\in c_1}|x-y|\right\}$$

とおく。このとき $\mathcal{C}$ は complete separable になる。

定理2

$\beta > 0$ は十分大とする。このとき、ある確率空間$(\hat{\Omega}, \hat{P})$及びその上の$\mathcal{C}$－値確率変数$\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \cdots, B_0$がとれて、

(i) $(\hat{\lambda}_N, \hat{P})$ と $(\mathcal{A}_N(\lambda), P_N^{\omega,\pm})$ は同じ分布，

(ii) $(B_0, \hat{P})$ は1次元 Brownian bridge

(iii) $d(\hat{\lambda}_N, B_0) \longrightarrow 0$ as $N \to \infty$ $\hat{P}$－a.s.

が成り立つ。

即ち、$\mathcal{A}_N(\lambda)$は現実に$N \to \infty$のとき$\mathcal{C}$内でBrownian bridgeのあるpathに近づいていく。従って入自身は遠くから見ると直線に近かったが、適当に近づいて見ると全体が良く見え、しかも非常にギザギザのあるものとなっている。

§8 まとめ

ここでの議論はβが十分大きなときの話であったが、定理2の現象は$\beta > \beta_c$で起こっているものと期待されている。それは$P_V^{\omega,\pm}$が2次元では$V \to \mathbb{Z}^2$のとき$\frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_-)$にweakに収束するという事実から出てきている。なぜなら原点は必ず＋の相（入の上）か－の相（入の下）に入っており、入と原点との距離はだいたい$\sqrt{N}$ぐらいはなれているからである。ここで$V = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{L};\ |x_1| \leq N, |x_2| \leq N\}$とする。ところが3次元では事情は異なり、$\beta$大のとき入の高さはNにindep.

な分布を持つ。従って λ は原点からほとんど遠ざからない。このためどの様な normalization A_N' をとろうと $A_N'(\lambda)$ は $\{x_3=0\}$ なる平面の一部に収束してしまう。これが2次元と3次元の大きな違いである。しかし，β が比較的小さい時（$\beta_c \gg \beta > \beta_c'$，$\beta_c'$ は3次元の critical value）λ の分布は N とともに ∞ に近づくある order をもつものと予想されている。しかし，このときの order，極限の $\lim A_N'(\lambda)$ の分布，これが β のどの様な値で成立するかなどの問題はすべてまだ完全に open である。

参考文献

§1 に関係しては

[1] 宮本宗実「格子気体の相転移」Seminar on Probability vol. 38 (1973)

[2] G. Gallavotti ; Rivista del Nuovo Cimento, 2, 133 (1972)

[3] M. Aizenman ; Comm. math. Phys. 73, 83 (1980)

[4] Y. Higuchi ; to appear in Proc. Int. Symp. Estergom, Hungary, 1979.

§2 に関しては

[5] R. A. Minlos and Ya. G. Sinai ; Trans. Moscow

Math. Soc. 19, 121 (1968)

[6] R. A. Minlos, Ya. G. Sinai : Math. USSR Sbornik, 2, 335 (1967)

[7] G. Gallavotti. and A. Martin-Löf ; Comm math phys., 24, 253 (1972)

§3 ～ §7 に関しては

[8] G. Gallavotti ; Comm. Math. Phys., 27, 103 (1972)

[9] G. Del Grosso ; Comm. Math. Phys. 37, 141 (1974)

[10] Y. Higuchi ; Z. Wahr. verw. Geb. 50, 287 (1979)

[11] Y. Higuchi ; in Quantum Fields - Algebras, Processes, 398, Springer (1980)